**Лекция 5 План лекции**

1. Отношения порядка.

1.1. Примеры отношений порядка.

1.2 Определение отношений порядка.

1. Терминология и обозначения.
2. Виды отношений порядка.
3. Основные понятия об упорядоченных множествах.
4. Линейно упорядоченные множества.
5. Свойства линейно упорядоченных множеств.
6. Вполне упорядоченное множество.
7. Частично упорядоченное множество.
8. Разбиение частично упорядоченного множества на цепи.
9. Определение наибольшего элемента множества.
10. Определение максимального элемента множества.
11. Определение наименьшего и минимального элементов множества.
12. Определение верхней и нижней граней множества.
13. Определение точной верхней грани множества.
14. Определение точной нижней грани множества.
15. Диаграммы Хассе.

**1. Отношения порядка Примеры отношений порядка**

На практике часто приходится сталкиваться с отношениями, которые определяют некоторый порядок расположения элементов множества.

1. Мы отличаем понятие «раньше» и «позже» в случаях, когда элементами множества являются состояния динамической системы *t*1, *t*2 , *t* 3 , ...,*tn* , где

*t*1 *t* 2 *t* 3... *tn* .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *R*1 |  | *ti* ,*t* *j* *ti* | | | | | *t j* | *при i*  | *j* |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |
|  |  |  |  |  |  |
| *R*2 |  | *t* *j* ,*ti* *t* *j* | | | | | *ti* | *при j* *i* | |  |  |
|  |  |  | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

1. Мы также отличаем понятия «больше» или «меньше» и пользуемся при этом символами > или <, если элементы множества являются числами: (1,2,...5), где 1<2<...<5. В общем случае

*A* *a*0,*a*1,*a*2,...,*ai* ,...,*a j* ,...,*an* ,

где *a*0  *a*1  *a*2 ...  *ai* ...  *a* *j* ...  *an* .

Символами «>» или «<» пользуются для сравнения чисел. Отношение *R* в виде предиката, заданное на *A*  *A* .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *R*1 |  | *ai* ,*a* *j* *ai* | | | | |  *a j* | *при i*  | *j* |  |  |
|  |  |  | | |  |  |  |  |  | |  |
|  |  |  |  |  |  |
| *R*2 |  | *a* *j* ,*ai* *a* *j* | | | | |  *ai* | *при j* *i* | |  |  |
|  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

1. Мы отличаем понятия множества и подмножества, пользуясь символами или . Во всех случаях можно расположить элементы множества *A* или группы элементов в некоторое порядке или, другими словами, ввести отношение порядка на множестве *A*.

*A* *A*0, *A*1,..., *Ai* ,..., *A j* ,..., *An* .где *A*0  *A*1 ...  *Ai* ...  *A* *j* ...  *An* или

*A*0 *A*1... *Ai* ... *A j* ... *An* .Отношение *R* в виде предиката, заданное на *A*  *A* .

*R*1 *Ai* , *A* *j* *Ai*  *Aj* *при i*  *j*

*R*2 *Ai* , *A* *j* *Ai*  *Aj* *при i*  *j*



Во всех случаях можно расположить элементы множества в некотором порядке или, другими словами, ввести отношение порядка на множестве.

**Определения отношений порядка**

Отношения порядка на множестве *A* подразделяют на:

* отношения строгого порядка;
* отношения нестрогого порядка.

**Определение.** Отношение*R*называется **отношением строгого порядка** намножестве *A* *,* если оно обладает свойствами:

- *антирефлексивности*, т. е. если *xRy* то *x*  *y* .

*- антисимметричности,* т. е., если *xRy* и *yRx* , то *x*  *y* .- *транзитивности,* т. е., если *xRy* и *yRz* , то *xRz* .

**Определение.** Отношение*R*называется **отношением нестрогого порядка** намножестве *A* , если оно обладает свойствами:

- *рефлексивности*, т. е., *xRx* .

*- антисимметричности,* т. е., если *xRy* и *yRx* , то *x*  *y*

- *транзитивности,* т. е., если *xRy* и *yRz* , то *xRz* .

**Терминология и обозначения**

1.**Отношения нестрогого порядка** обозначают символом «  » по аналогии с отношением «меньше либо равно» на множестве действительных чисел. При этом, если *a*  *b*, то говорят, что элемент *a* не превосходит *b* или *a* подчинен *b* .

2. **Отношения строгого порядка**. Если установлено отношения строгого порядка между элементами *a* и *b* , то пишут *a* *b* и говорят, что *a* меньше *b* или что *a* строго подчинен *b*.

*Общий случай отношений.* Иногда, чтобы отличить отношение порядка нанекотором множестве от отношения порядка «» или «<» на множестве

действительных чисел, используют специальные символы « » или « ».

**Пример. Отношение порядка в** *Rn*

1. Отношения чисел «» «» задают нестрогий порядок. (*a*1,...,*ai*1,*ai* ,*ai*1,...,*an*) (*b*1,...,*bi*1,*bi* ,*bi*1,...,*bn*) если *a*1*b*1,..., *ai*1*bi*1, *ai* *bi* , *ai*1*bi*1,..., *an* *bn*

2. Отношения чисел «» «» задают строгий порядок. (*a*1,...,*ai*1,*ai* ,*ai*1,...,*an*) (*b*1,...,*bi*1,*bi* ,*bi*1,...,*bn* ) если *a*1*b*1,...,*ai*1*bi*1,*ai* *bi* ,*ai*1*bi*1,...,*an* *bn*

Однако для установления строгого порядка достаточно, чтобы условия *ai* *bi* было выполнено хотя бы по одной координате, т. е.

(*a*1,...,*ai*1,*ai* ,*ai*1,...,*an*) (*b*1,...,*bi*1,*bi* ,*bi*1,...,*bn* ) если *a*1*b*1,..., *ai*1*bi*1, *ai* *bi* , *ai*1*bi*1,..., *an* *bn*

(5, 1, 3) 5, 2, 3; 5, 3, 3и 5, 0, 0– не сравнимы.

**Виды отношений порядка: 1. Строгий полный порядок**

Отношение строгого порядка задано **на всех** элементах упорядоченного множества.

**2. Строгий частичный порядок**

Отношение строгого порядка задано **не на всех** элементах упорядоченного множества.

**3. Нестрогий полный порядок**

Отношение нестрогого порядка задано **на всех** элементах упорядоченного множества.

**4. Нестрогий частичный порядок**

Отношение нестрогого порядка задано **не на всех** элементах упорядоченного множества.

**Основные понятия об упорядоченных множествах**

*Упорядоченные множества образуют один из фундаментальных типов математических структур.*

**Определение.** *Упорядоченным множеством*называется непустое множество*X*вместе с заданным на нем бинарным нестрогим « » *отношением порядка,* которое по определению:

1. рефлексивно: *a*  *a* *;*
2. антисимметрично: *a* *b*  *a*  *a* *b* (для любых *a* , *b*, *X* *).*
3. транзитивно: *a* *b*  *c*  *a*  *c* *;*

или строгим «» *отношением порядка,* которое по определению:

1. антирефлексивно: *a* *b*  *a*  *b* *;*
2. антисимметрично: *a* *b* *b*  *a*  *a* *b*
3. транзитивно: *a* *b*  *c*  *a*  *c* *;*

**Линейно упорядоченные множества**

**Определение сравнимости.** Элементы*a*и*b*упорядоченного множестваназываются *сравнимыми,* если *a* *b* *,* *a* *b* или *a* *b* *.* Знаки ,  и  имеют обычный смысл.

**Определение (через сравнимость)**. Упорядоченное множество*X*называется*линейно упорядоченным,* или *цепью,* если любые два его элемента сравнимы.

**Определение (через отношение линейного порядка)**.

Упорядоченное множество *X* называется *линейно упорядоченным,* или *цепью,* если на нем задано отношение линейного порядка.

**Определение.** Бинарное отношение *R* на множестве *X* называется

*отношением линейного порядка,* если для любых *a* *X* и *b* *X* (для любыхдвух элементов множества *X* ) либо *aRb* *,* либо *bRa* *.*

*Иными словами*, отношение порядка *R* на множестве *X* называется линейным,если любые два элемента этого множества находятся в отношении *R* *.*

**Пример цепи.** Цепь – это множество всех действительных чисел с обычнымпорядком.

Заметим, что антиподами цепей служат антицепи.

**Определение**

*Антицепь –* упорядоченное множество, в котором никакие два различныхэлемента не являются сравнимыми.

**Свойства линейно упорядоченных множеств**

1. **Покрытие**

Пусть *X* - произвольная цепь. Если *a* *b* в *X* и не существует элемента *c* *X* с условием *a*  *c* *b* (лежащего между *a* и *b* ), то соотношение *a* *b* называется *покрытием.*

2. **Взаимное положение элементов**

Элемент *a* *называется предыдущим* для *b* . Элемент *b* называется *последующим* за *a* *.*

Элемент цепи, у которого нет предыдущего элемента, называется *предельным* *элементом.*

3. **Плотная цепь**

Цепь называется *плотной,* если в ней нет покрытий; в плотных цепях между любыми элементами *a* *b* лежит бесконечно много элементов.

4. **Плотная подцепь**

Подцепь *A* цепи *X* называется *плотной в* *X* *,* если между любыми элементами *a* *b* из *X* обязательно найдется элемент из *A .*

5. **Полная сверху цепь**

Цепь называется *полной сверху,* если всякое ее непустое подмножество имеет sup.

6. **Полная снизу цепь**

Цепь называется *полной снизу,* если всякое ее непустое подмножество имеет inf.

7. **Полная цепь**

Цепь называется *полной,* если она полная сверху и снизу одновременно.

**Вполне упорядоченное множество**

Важнейший класс цепей образуют вполне упорядоченные множества

**Определение.** Цепь называется*вполне упорядоченным множеством,*еслилюбое ее непустое подмножество обладает наименьшим элементом.

**Пример.** Цепь N всех натуральных чисел и конечные цепи дают примерывполне упорядоченных множеств.

**Пример.** Любое непустое подмножество вполне упорядоченного множествавполне упорядочено.

**Частично упорядоченное множество**

**Определение (через отношение частичного порядка)**.

Упорядоченное множество *X* называется *частично упорядоченным,* если на нем задано отношение частичного порядка.

**Определение.** Бинарное отношение*R*на множестве*X*называютотношением ***частичного порядка****,* если для некоторых *a* *X* *,* *b* *X* не имеет места ни *aRb* *,* ни *bRa* *.*

**Если отношение** *R* **на** *X* **есть отношение** *нестрогого частичного**порядка*, то оно

рефлексивно - *a* *aRa* ,

антисимметрично - *a* , *b* *aRb* *bRa*  *a* *b* , транзитивно - *a* , *b*, *c* *aRb* *bRc*  *aRc* .

**Если отношение** *R* **на** *X* **есть отношение** *строгого частичного порядка*, то

оно

антирефлексивно - *a* , *b* *aRb*  *a*  *b* , антисимметрично - *a* , *b* *aRb* *bRa*  *a* *b* ,

транзитивно *a* , *b*, *c* *aRb* *bRc*  *aRc* **.**

**Пример 1.** Пусть задано:

1. Множество Т положительных делителей числа 30.
   1. 1,2,3,5,6,10,15,30.
2. Отношение « », согласно которого сравнимы *m* и *n*: *m*  *n при* *условии, что m* делит *n* нацело.

Пусть *n*=15 и *m*=5. Тогда n и m – сравнимы, поскольку 5 делит 15 нацело. Пусть *n*=6 и *m*=5. Тогда *n* и *m* – несравнимы, поскольку 5 не делит 6 нацело.

*Вывод*

1. Заданное отношение порядка на множестве Т является отношением частичного порядка.
2. Множество Т является частично упрядоченным на заданном отношении.

**Разбиение частично упорядоченного множества на цепи**

Пусть имеется некоторое множество *A* *.* Говорят, что множество *A* *разбито* на подмножества *A*1, *A*2 , *A*3 ,… *Am* , если:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | *Ai* | , | | *i* 1,2,...,*m*; |  |  |  |
| 2. | *A*  *A* | | *j* | , если *i*  *j* для всех *i* , *j*  1,2,3,...,*m* | | ; |  |
|  | *i* |  |  |  |  |  |
|  |  | *m* |  |  |  |  |  |
| 3. | *A*  *Ai* | | | |  |  |  |

*i*1

Пусть *A* есть частично упорядоченное множество. Разбиение множества *A* на цепи называется *наименьшим*, если оно имеет наименьшее число элементов *m* по сравнению с другими разбиениями *A* на цепи. Такое разбиение также называется *минимальным цепным разбиением* *(МЦР*) множества *A* .

**Определение наибольшего элемента множества**

**Наибольшим** элементом линейно упорядоченного множества*X*относительнострогого «» или нестрогого «» упорядочения будем называть такой элемент *a* *X* , что для любого *x* *X* верно *x*  *a* или *x*  *a* .

**Теорема** о единственности наибольшего элемента.

Если существует наибольший элемент линейно упорядоченного множества, то он является единственным.

**Доказательство.** Предположим, что существуют два наибольших элемента*a*и *a*. Тогда для всякого *x* выполняется *x*  *a* и *x*  *a*. В частности, *a*  *a* или

*a*  *a* .

Поскольку все отношения порядка обладают свойством антисимметричности, то из *aRa*  *a* *Ra*  следует *a*  *a*.

Из *a*  *a* следует, что если в линейно упорядоченном множестве существует наибольший элемент, то он единственен. Поэтому, говоря о наибольшем элементе множества, имеют в виду **вполне определенный** его элемент.

**Пример.** Необходимо найти наибольший элемент линейно упорядоченногомножества *X* 1,2,15,18, заданного на отношении нестрогого порядка *a* *b* .

Согласно определению:

1. **Все** элементы данного множества **должны быть меньше** или равнынаибольшему.
2. Наибольший элемент – **единственный**.

Сравним элементы множества *X* :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1)**11, 1 | |  2, 1  15, 1  18. | |
| **2)** | 2  1, | 22, | 2  15, 2  18. |
| **3)** | 151, | 15  | 2, 15  15, 15  18. |

**4)** 181, 182, 1815, 1818.



Необходимым условиям соответствует только элемент 18.

**Определение максимального элемента множества**

**Максимальным** элементом частично упорядоченного множества*X*относительно строгого «<» или нестрогого « » называют такой его элемент *a* *X* , что имеет место одна из двух ситуаций:

* либо *x <a* и *x*  *a*,
* либо *a* и *x* – несравнимы.

**Замечание**

На одном и том же множестве могут быть заданы **различные отношения**

порядка.

По одному из них множество может быть линейно упорядочено, а по другому – частично упорядочено.

Тогда по первому отношению будем говорить **о наибольшем элементе**, а по второму – **о максимальном**.

**Определение наименьшего и минимального элементов множества**

**Наименьшим** элементом линейно упорядоченного множества*X*относительно строгого «<» или нестрогого « » упорядочения будем называть такой элемент *a* *X* , что для всех *x* *X* верно *a*  *x* или *a*  *x* .

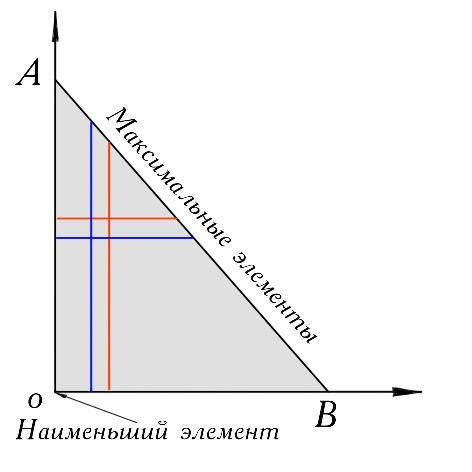
**Минимальным** элементом частично упорядоченного множества*X*относительно строгого «<» или нестрогого «» упорядочения называют такой его элемент *a* *X* , что имеет место одна из двух ситуаций:

- либо *a*  *x* и *a*  *x* ,

- либо *a* и *x* – несравнимы.

**Замечание.** Если на множестве есть наименьший элемент, то он являетсяединственным минимальным. Аналогично, если на множестве есть наибольший элемент, то он является единственным максимальным.

**Пример.** Рассмотрим множество*X*точек треугольника*OAB*со следующимотношением порядка: *a* , *b* *c* ,*d*  если и только если *a*  *c* и *b*  *d* .



Точка 0,0 является наименьшим элементом данного множества.

Минимальный элемент множества *X* – единственный и совпадает с наименьшим элементом.

Максимальными элементами множества *X* являются все точки, лежащие на стороне *AB* треугольника *OAB*.

Наибольший элемент множества *X* отсутствует.

**Определение верхней и нижней граней множества**

**Определение верхней грани**

Если *A* есть частично упорядоченное множество и *B*  *A* , то элемент *a* *A* называется **верхней гранью** множества *B* , если для любого *b* *B* имеет место

*b*  *a* .

*A* 1,2,3,4,5,6,7,8,9**,** *B* 1,2,3,4,5. Верхние грани: 5,6,7,8,9

**Определение нижней грани**

Если *A* есть частично упорядоченное множество и *B*  *A* , то элемент *a* *A* называется нижней гранью множества *B* , если для любого *b* *B* имеет место *a* *b* .

*A* 1,2,3,4,5,6,7,8,9**,** *B* 5,6,7,8,9**.**Нижние грани: 1,2,3,4,5

**Определение точной верхней грани множества**

*A* 1,2,3,4,5,6,7,8,9, *B* 1,2,3,4,5.

Элемент *a* *A* называется **наименьшей верхней гранью**, если *a*  min *ai* , где

*i*

*ai* – произвольная верхняя грань множества *B*. *a* min5,6,7,8,95

Наименьший элемент *a* множества всех верхних граней называется точной верхней гранью или *супремумом* и обозначается sup *B* .

*A* 1,2,3,4,5,6,7,8,9, *B* 1,2,3,4,5.sup *B* 5

Иными словами, наименьшая верхняя грань есть верхняя грань, являющаяся нижней гранью множества всех верхних граней.

**Определение точной нижней грани множества**

*A* 1,2,3,4,5,6,7,8,9, *B* 5,6,7,8,9.

Элемент *a* *A* называется **наибольшей нижней гранью,** если *a*  max *ai* , где

*i*

*ai* – произвольная нижняя грань множества *B*. *a* max1,2,3,4,5=5

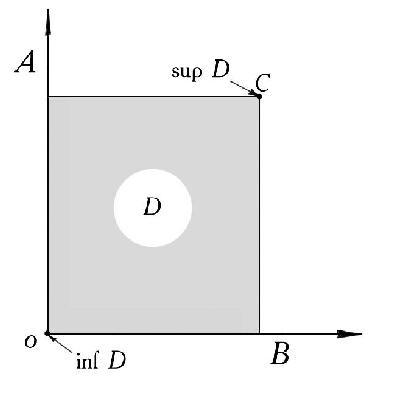
Наибольший элемент множества всех нижних граней называется точной нижней гранью или *инфимумом* и обозначается inf *B* .

*A* 1,2,3,4,5,6,7,8,9, *B* 5,6,7,8,9.inf *B* 5.

Иными словами, наибольшая нижняя грань есть нижняя грань, являющаяся верхней гранью множества всех нижних граней.

**Пример.** Рассмотрим множество*D*точек прямоугольника*OACB*с заданнымотношением порядка:

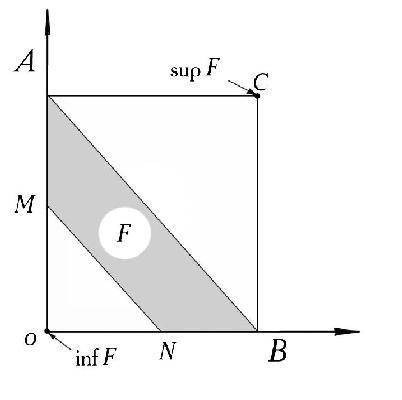
*a* , *b* *c* ,*d* если и только если *a*  *c* и *b*  *d* .



Точка *O* является точной нижней гранью inf *D* *D* . Точка *C* является точной верхней гранью sup*D* *D*.

Из рисунка видно, что обе точки принадлежат множеству *D*.

**Пример.** Рассмотрим множество*F*точек трапеции*ABNM*с заданнымотношением порядка: *a* , *b* *c* ,*d* если и только если *a*  *c* и *b*  *d* .



Пример показывает, что существует точная верхняя грань sup *F* и точная нижняя грань inf *F* .

Однако ни одна из граней не принадлежит множеству *F* .

**Диаграмма Хассе**

Для графического представления упорядоченного множества *R* используют *диаграмму Хассе.* Эта диаграмма строится следующим образом.

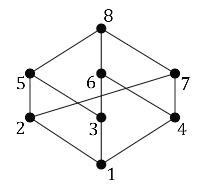
Каждому элементу множества *X* ставится в соответствие точка (кружок) на плоскости, причем, если *aRb,* точку, соответствующую элементу *a* , располагают ниже точки, соответствующей элементу *b*. Точки, *a X* , *b X*

соединяют линией (ребром), если *aRb* и не существует элемента *c X* такого, что *aRc* и *cRb.*

**Пример.** Пусть дано множество*X*1,2,3,4,5,6,7,8, на которомзадано отношение

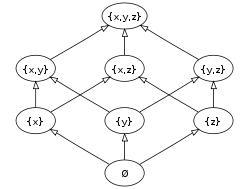
* 1. 1,2 , 1,3 , 1,4 , **1,5** , **1,6** , **1,7** , **1,8** , 2,5 , 2,7 , **2,8** , 3,5 , 3,6 , **3,8** , 4,6 , 4,7 , **4,8** , 5,8 , 6,8 , 7,8

Диаграмма Хассе данного отношения представлена на рисунке.



**Пример.**

Пусть *C* *x* , *y* , *z*, а *X* – **булеан** множества С:



*X* ,*x*,*y*,*z* ,*x* , *y*,*y* , *z* ,*z* , *x*,*z* , *y* , *z*

Определим отношение *R* на *X* посредством

*T* ,*V* *R ,* если *T* *V .* Например, *y*,*x* , *y**R* , поскольку

* *y**x* , *y*. Однако*y* , *z*,*z**R ,* поскольку
* *y* , *z**z*.

Построив отношение *R* , можно легко проверить, что *X* , *R*  – ЧУ– множество.

**Пример**.

На рисунке представлен частичный порядок, порожденный бинарным отношением

*R a*1, *a* 2, *a*1, *a* 3, *a*1, *a* 5, *a* 4, *a* 2, *a* 5, *a* 2.

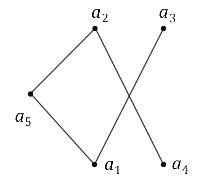


Диаграмма Хассе помогает лучше понимать взаимосвязь элементов, принадлежащих одному и тому же упорядоченному множеству (например, принадлежность одной и той же цепи или одной и той же антицепи).